ELEKTROSTATIK

Die Punkte dienen nur Ihrer Information. Die Studienleistung wird am Ende der Vorlesungszeit durch einen schriftlichen Test erreicht. Diesen werden Sie allerdings höchstwahrscheinlich nur bestehen können, wenn Sie die Hausübungen auch tatsächlich bearbeiten.

[H24] *Spiegelladung* **[$4 + 6 + 6 = 16$ Punkte]**

Betrachten Sie eine Ladung in der Nähe einer leitenden, geerdeten Kugelschale mit Radius a und Mittelpunkt im Ursprung. Die Punktladung Q befinde sich an der Stelle $\vec{y}$, $|\vec{y}\,| > a$. Das Potential $\phi(\vec{r})$ im Gebiet außerhalb der Kugel muss die Randbedingung $\phi(|\vec{r}| = a) = 0$ erfüllen. Anstatt uns mit der Kugelschale direkt zu befassen, führen wir eine virtuelle, zweite, Ladung Q' an einer Stelle $\vec{y}\,'$ mit $|\vec{y}\,'| < a$, also im Innern der Kugel, ein. Unser Ansatz für das Potential lautet damit

$$\phi(\vec{r}) = \frac{Q}{4\pi\,\epsilon_0}\,\frac{1}{|\vec{r}-\vec{y}\,|} + \frac{Q'}{4\pi\,\epsilon_0}\,\frac{1}{|\vec{r}-\vec{y}\,'|}$$

(a) Folgern Sie aus der Symmetrie des Problems, dass $\vec{y}$ und $\vec{y}\,'$ parallel zueinander sein müssen.
(b) Zur Vereinfachung setzen Sie $\vec{r} = r\,\vec{e}_r$ und $\vec{y} = y\,\vec{e}_y$, $\vec{y}\,' = y'\,\vec{e}_y$ mit $|\vec{e}_r| = |\vec{e}_y| = 1$. Bringen Sie damit die Randbedingung für $\phi(r = a)$ in die Form $\frac{Q}{a} = -\frac{Q'}{y'}\frac{\cdots}{\cdots}$. *Hinweis*: Es ist nützlich, $|\vec{x}\,| = (\vec{x}^{\,2})^{1/2}$ zu schreiben und auszunutzen, dass $\vec{e}_r$, $\vec{e}_y$ Einheitsvektoren sind.
(c) Berechnen Sie aus der Tatsache, dass die Randbedingung (b) für alle Winkel zwischen $\vec{e}_r$ und $\vec{e}_y$ gelten muss, den Ort y' und die Ladung Q' der Spiegelladung. (Wer will, kann sich für den Spezialfall $a = 1$ überlegen, wieso dies auch „Methode der reziproken Radien“ genannt wird.)

[H25] *Hohlkugel* **[$6 + 4 = 10$ Punkte]**

Wir betrachten eine Kugel mit Radius R_0, die einen kugelförmigen Hohlraum mit Radius r_0 habe. Das Zentrum des Hohlraums sei um einen Vektor $\vec{a}$ zum Zentrum der Kugel verschoben. Offensichtlich muss $|\vec{a}\,| + r_0 < R_0$ sein. Die Hohlkugel sei homogen mit einer Ladungsdichte ϱ_0 geladen.

(a) Berechnen Sie das elektrostatische Potential $\phi(\vec{r})$ im Innern des ladungsfreien Hohlraums.
(b) Berechnen Sie das zugehörige elektrostatische Feld $\vec{E}(\vec{r})$ im Innern des ladungsfreien Hohlraums.

Hinweise: Die Randbedingung ist, dass das Potential im Unendlichen verschwinden soll. Denken Sie an das Superpositionsprinzip.

[H26] *Energie und Kraft geladener Kugeln* **[$6 + 10 = 16$ Punkte]**

Wir betrachten leitende Kugeln mit Radius R, die auf ihrer Oberfläche die Ladung Q tragen.

(a) Berechnen Sie die Energie des elektrischen Feldes einer einzelnen solchen Kugel. Die Ladung ist hier homogen auf der Oberfläche verteilt.
(b) Betrachten Sie nun zwei identische Kugeln, deren Mittelpunkte sich in einem Abstand ℓ voneinander befinden. Berechnen Sie die Energie dieses Systems. Variieren Sie dann den Abstand ℓ und berechnen Sie so die Kraft zwischen den beiden Kugeln.

Hinweise:

(1) Da die Kugeln Leiter sind, ist das Potential auf ihren Oberflächen konstant. Aus Symmetriegründen ist diese Konstante auf beiden Oberflächen die gleiche und hat den Wert

$$\Phi := \phi(\vec{r})\big|_{\vec{r}\in\partial K_i} = Q\Big(\frac{1}{R} + \frac{1}{\ell - R}\Big)\,,$$

wobei ∂K_i die Oberfläche der Kugel K_i bezeichnet, $i = 1, 2$. Können Sie begründen, wie man zu diesem Wert für das Potential auf den Kugeloberflächen kommt?
(2) In Anwesenheit einer zweiten Kugel ist die Ladung nicht mehr homogen auf der Oberfläche verteilt. Beachten Sie aber, dass das Integral der Flächenladungsdichte ω über die gesamte Kugeloberfläche nach wie vor den Wert Q annimmt,

$$\int_{\partial K_i} \mathrm{d}^2 f\,\omega(\theta,\varphi) = Q\,.$$

Bitte wenden!

(3) Um nun die Energie zu berechnen, können Sie eine geeignete Formel aus der Vorlesung verwenden. Oder Sie ersetzen in der Integration über die Energiedichte den Ausdruck $\vec{E}^2$ durch $-\vec{E} \cdot \vec{\nabla}\phi$ und nutzen dann partielle Integration und die Maxwellgleichung $\vec{\nabla} \cdot \vec{E} = 4\pi\,\varrho$.

[!] *Ausführung* **[6 Punkte]**
Mit insgesamt 6 Punkten wird die Ausführung der Lösung insgesamt bewertet, also Leserlichkeit, Vollständigkeit der Rechenwege, Ausführlichkeit der Kommentare zum Lösungsweg usw.

[!] *Hinweise zu Computerübungen*
Die gesamte Lösung zusammen mit Erläuterungen und Diskussionen der Ergebnisse muss in einem *Mathematica*-Notebook verfasst werden. Sie haben für die Computerübung insgesamt 14 Tage Zeit.

Lesen Sie unbedingt noch einmal die allgemeinen Hinweise zu den Computerübungen durch, die Sie auf der Seite „Allgemeine Informationen" der Lehrveranstaltung im Stud.IP finden.

Beachten Sie, dass jeweils die Hälfte der maximal möglichen Punkte die Ausführung der Lösung der Computerübungen bewertet, also insbesondere, ob die Lösung gut strukturiert programmiert wurde, ob die Lösung eine vollständige Dokumentation im *Mathematica*-Notebook enthält, ob Plots vernünftig beschriftet sind, und ob Sie Ihre Resultate sinnvoll diskutieren und interpretieren.

[C4] *Viele Spiegelladungen* **[$3+5+5+5+3=21$ Computerpunkte]**
[CÜ] Wir betrachten zwei unendlich in y und z ausgedehnte, leitende und geerdete Platten bei $x=0$ und $x=1$. Zwischen den Platten befinde sich bei $x=d$ eine Ladung $q=1$ auf der x-Achse. Es soll mit Hilfe der Methode der Spiegelladungen das Potential iterativ bestimmt werden, wobei wir die Randbedingungen $\phi(x=0,y,z)=\phi(x=1,y,z)=0$ haben. Es sei $\phi_{(1)}$ das Coulomb-Potential der Punktladung. *Hinweis*: Aufgrund der Rotationssymmetrie um die x-Achse genügt es im folgenden, allein die xy-Ebene zu betrachten. Die Aufgabe muss vollständig mit *Mathematica* gelöst werden.

(a) Geben Sie eine erste Näherung $\phi_{(2)}$ an, indem Sie zwei Spiegelladungen hinzufügen. Wo sollten Sie diese plazieren? Zeigen Sie durch Plotten des Potentials auf den Platten, dass $\phi_{(2)}$ eine bessere Lösung als $\phi_{(1)}$ ist. Warum ist $\phi_{(2)}$ immer noch nicht die korrekte Lösung? *Hinweis*: Offensichtlich ist der Betrag von ϕ, bzw. sein Maximum, ein gutes Maß für die Genauigkeit der Approximation.

(b) Wie können Sie $\phi_{(2)}$ durch das Hinzufügen weiterer Spiegelladungen sukzessive verbessern? Führen Sie 40 weitere Iterationen durch und vergleichen Sie die Genauigkeit der Approximation, indem Sie das Maximum des Betrages der $\phi_{(n)}$ auf einer der Platten in Abhängigkeit von n für $d=1/2$ und $d=1/3$ plotten. *Hinweise*: Verwenden Sie `FindMaxValue`. Es bietet sich an, mit einer Schleife zu arbeiten und die $\phi_{(n)}$ in einem Array von Funktionen zu speichern.

(c) Bestimmen Sie für das so genäherte Potential die Feldstärke und plotten Sie diese als Feldlinienplot in der xy-Ebene. *Hinweis*: Verwenden Sie `StreamPlot`. Erstellen Sie außerdem Plots für das Potential $\phi_{(n)}(x,y=0,z=0)$ auf der x-Achse für $n=1,2$ und $n=42$.

(d) Ein anderes Maß für die Genauigkeit der Approximation ist der Betrag der Tangentialkomponente $\vec{E}^t$ des elektrischen Feldes auf einer der Platten. Begründen Sie, warum dies so ist. Plotten Sie nun analog zu (b) den Maximalwert von $|\vec{E}^t_{(n)}|$ auf einer der Platten in Abhängigkeit von n. Um welchen Faktor fällt der Fehler im Potential und in der Tangentialkomponente des elektrischen Feldes bei Verdopplung der Anzahl n der Iterationen jeweils? Haben Sie eine Erklärung für dieses Verhalten?

(e) Es sei nun d sehr klein, d.h., die Ladung befinde sich sehr nah an einer der Platten. Zeigen Sie, dass in diesem Fall bereits eine einzige Spiegelladung (wo?) eine brauchbare Näherung, und drei Spiegelladungen (wo?) eine sehr gute Näherung erzielen.